

# Die Winkelfunktion – der Weg zur mühelosen Dreiecksberechnung

Winkelfunktionen, auch Trigonometrische Funktionen genannt, sind nur auf den ersten Blick ein abschreckendes Stück Mathematik. Das Geheimnis zu ihrem Verständnis liegt in der Art und Weise, wie man sie erklärt bekommt. Einmal verstanden, ist es mit ihnen möglich, sogar die Entfernung von Sternen zu berechnen.

Sinus, Cosinus und Tangens nötigen alleine durch ihre Namen jedem Mathematikinteressierten eine gehörige Portion Respekt ab. Völlig zu Unrecht werde sie als unüberwindliche Hindernisse auf dem Weg zum Verständnis einer wunderbaren Mathematik angesehen.

Im Umgang mit den Winkelfunktionen ist es wichtig zu wissen, dass positive Winkel stets im Gegenuhrzeigersinn verlaufen. Lediglich drei Grundformeln zum Berechnen aller unbekanntener Werte im rechtwinkligen Dreieck müssen beherrscht werden: diejenigen von Sinus, Cosinus und Tangens. Der Cotangens ist nicht nötig. Beim Anwenden der Formeln müssen stets zwei Werte bekannt sein, um den dritten Wert zu berechnen.

Während man mit der Pythagoras-Funktion lediglich die Längen am rechtwinkligen Dreieck, aber keine Winkel berechnen kann, ist man mit den Trigonometrischen Funktionen von Sinus, Cosinus und Tangens in der Lage, fehlende Winkel und natürlich die fehlenden Längen zu berechnen. Man muss sich allerdings im Formelumstellen ein wenig auskennen. Die Kunst besteht darin, das Gesuchte auf eine Seite zu bekommen, sodass es dort alleine steht. Zunächst sucht man aus

den drei Formeln in Abbildung 1 diejenige aus, mit der man die gestellte Aufgabe lösen kann. Dazu ist zu überlegen, in welcher der drei Grundformeln zwei Werte bekannt sind und zudem der gesuchte Wert vorkommt.

Wenn beispielsweise die Werte von  $a$  und  $b$  gegeben sind und es soll der Winkel berechnet werden, dann kommt nur die Tangens-Funktion in Frage, da hier die beiden gegebenen Werte vorkommen. Wenn hingegen die Werte  $a$  und  $c$  gegeben sind, dann kann der Winkel nur mit der Sinus-Funktion berechnet werden.

Die Sinus-Funktion wird ebenso verwendet, wenn der Winkel sowie die Strecke  $c$  gegeben sind und die Länge der Strecke  $a$  berechnet werden soll. Dies war bereits das ganze Geheimnis der Winkelfunktionen. Entscheidend ist, dass man sich die Grundformel und die Merksätze einprägt und das Umstellen von Formeln übt.

## Übung macht den Meister

Wie man sieht, ist es einfach die trigonometrischen Funktionen anzuwenden. Es ist jedoch unbedingt notwendig, damit zu üben, um mehr Sicherheit in de-

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \quad \rightarrow \quad a = \tan \alpha * b$$

Bekannte Werte      Gesuchter Wert

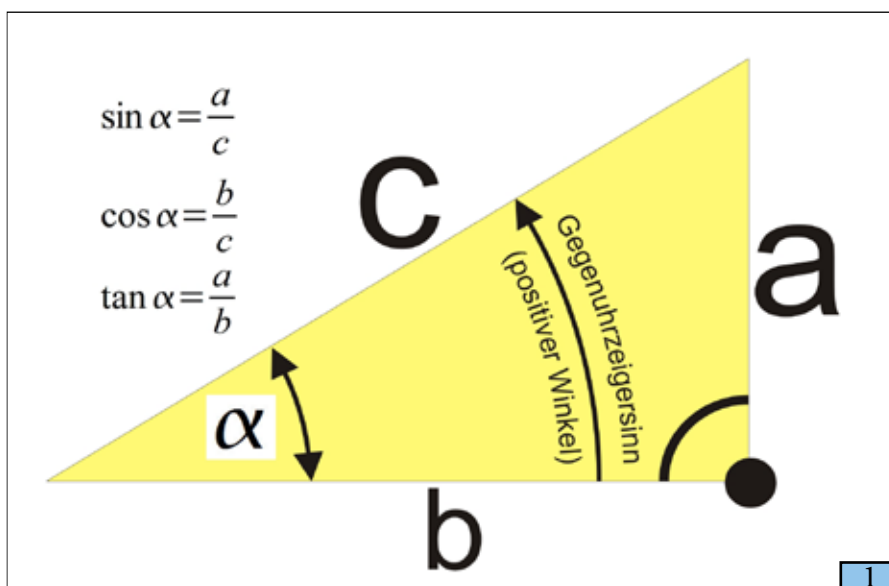
Sicheres Umstellen von Formeln ist eine wichtige Voraussetzung zum Anwenden der Winkelfunktionen.

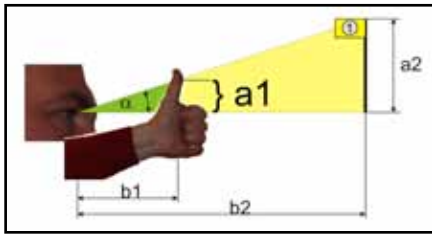
ren Anwendung zu bekommen. Daher ist es am besten, sich einmal konkrete Aufgaben näher ansehen, die mit den Winkelfunktionen lösbar sind. Selbst wer sich sehr schwer tut, die Funktionen zu verstehen, der sollte es so machen, wie viele Autofahrer. Denn zum Autofahren ist es auch nicht nötig, die Funktion eines Verbrennungsmotors zu verstehen. Es genügt, wenn man weiß, wie man schaltet, bremst und die Funktionen der vielen Hebel und Schalter kennt. Jedenfalls ist kein Ingenieursstudium Voraussetzung, um ein Auto zu beherrschen.

Mit Formeln sollte ähnlich vorgegangen werden: Diese einfach als Werkzeuge nutzen, selbst wenn man sie noch nicht versteht. Es ist für das Lernen besonders förderlich, wenn man Beispiele verwendet, die man selbst gut nachvollziehen kann. Daher eignet sich das Berechnen der Höhe von Bäumen sehr gut, um mit den Trigonometrischen Funktionen vertraut zu werden.

Es genügt, den Winkel bis zur Baumkrone, sowie den Abstand des Messgerätes vom Baum zu ermitteln. Für die Ermittlung des Winkels muss nicht auf einen Theodoliten zurückgegriffen werden. Ein einfacher, selbst gebastelter Winkelmesser mit einem kleinen Lot an einer Schnur, die in der Mitte des Winkelmessers befestigt ist, würde ähnlich gute Ergebnisse liefern. Es sind auch Kompasser verwendbar,

**1 Um die für technische Berufe wichtigen Winkelfunktionen sicher anwenden zu können, genügt es, sich die Drehrichtung positiver Winkel und die drei Formeln zur Berechnung von Sinus, Cosinus und Tangens zu merken.**





**Selbst zum Schätzen von Entfernungen lässt sich die Trigonometrie verwenden**

wenn diese einen eingebauten Höhenwinkelmesser besitzen. Wenn ein Winkel von 83 Grad und ein Abstand von zehn Meter zum Baum angenommen werden, dann beträgt die Baumhöhe a 81.44 Meter. Nun wird noch die Höhe des 1,7 Meter hohen Messgeräts hinzugezählt, was zur Gesamtbaumhöhe von 83,14 Meter führt.

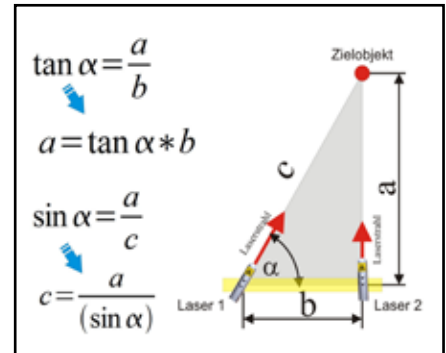
**Jonglieren mit Zahlen**

Trigonometrische Berechnungen werden gerade in Handwerk und Industrie häufig angewendet. Es kommt nicht selten vor, dass die Koordinaten von Bohrungsabständen mit den Winkelfunktionen bestimmt werden müssen, da häufig die Bohrungen lediglich mit einem Radius und mit einem Winkel bemaßt sind.

Mit den Winkelfunktionen lassen sich tolle Dinge anstellen. Mit ihnen ist es auch möglich, seinen Daumen zur Entfernungsbestimmung zu benutzen. Dies kann man sich etwa beim Golfspielen zunutze machen, um die Entfernung zum Loch besser abschätzen zu können. Dazu ist es lediglich nötig, die Höhe der Fahnen zu kennen. Die Fahnenhöhe beträgt in der Regel 2,5 Meter. Der Abstand des Daumens zum Auge ist individuell verschieden und muss ermittelt werden. Nehmen wir an, er beträgt 0,7 Meter. Mit

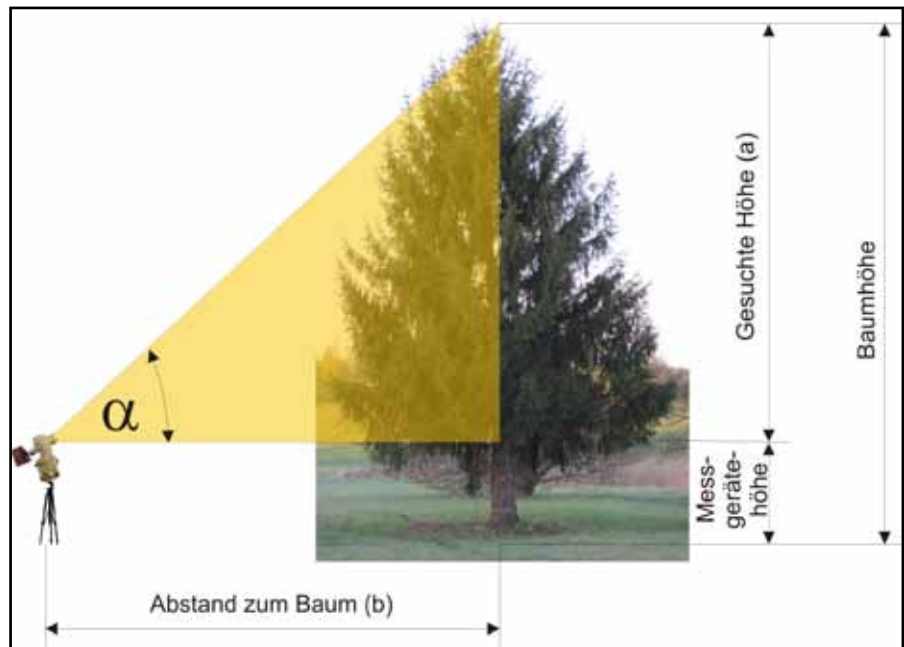
diesem Wert ist es möglich auszurechnen, wie weit die Fahne entfernt ist wenn diese »am Daumen« 1 cm hoch erscheint: nämlich 175 Meter. Je näher die Fahne kommt, desto größer wird sie am Daumen erscheinen. Wenn diese am Daumen 3cm hoch ist, dann beträgt der Abstand zur Fahne nur mehr etwa 58 Meter. Die Trigonometrie kann so praktisch sein. Da bekommt der Spruch »Pi mal Daumen« seine reale Entsprechung.

Allerdings funktioniert diese Methode bei Personen, die Maße schlecht schätzen können, nicht so gut. Dafür gibt es zwei Lösungen: Entweder man zeichnet am Daumen mit einem Filzstift eine Zentimeterskala ein oder man benutzt gleich ein Lineal anstelle des Daumens, um die Entfernung zu bestimmen. Wenn man et-



**Um die gesuchten Strecken zu ermitteln, wird zunächst Strecke a berechnet, ehe Strecke c berechnet werden kann.**

was Spannung in die Entfernungsbestimmung mittels der Trigonometrie bringen möchte, kann ein einfacher Laserpointer



**Die Winkelfunktionen können sehr leicht verstanden werden, wenn keine abstrakten Modelle dafür bemüht werden, sondern Berechnungen an realen Objekten durchgeführt werden. Besonders gut eignen sich dafür Bäume oder Häuser.**





**hyperMILL®**

2D · 3D · HSC · millTURN · 5 AXIS

**MEHR PERFORMANCE.  
KÜRZERE BERECHNUNGSZEITEN.  
BESSERE OBERFLÄCHEN.**

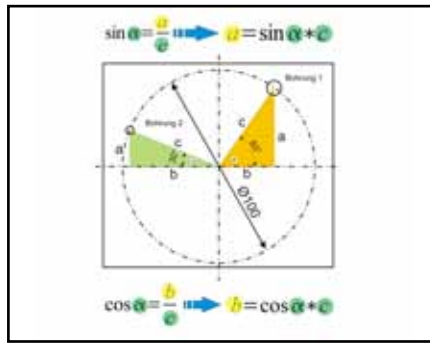
- Neue Normtaschen-Strategie
  - Optimiertes 3D-Schruppen
  - Bessere Analysewerkzeuge
  - Neue 5Achsen-Funktionen
- [www.openmind-tech.com](http://www.openmind-tech.com)



**EURO  
MOLD  
Frankfurt**  
Halle 8.0 ■ Stand M06  
27.-30. Nov. 2012



**OPEN MIND**  
THE CAM COMPANY

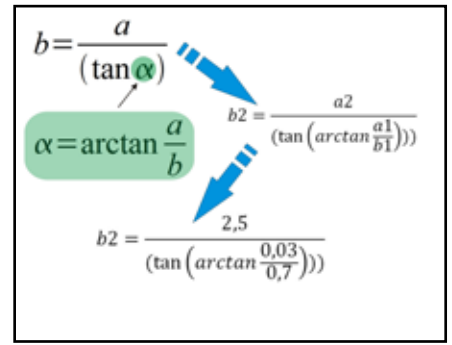


Das Bestimmen von Bohrungsabständen sind häufige Aufgaben, die Facharbeiter mit den Winkelfunktionen lösen.

empfohlen werden. Zwei Stück von diesem »Zeigergerät« werden an einem selbstgebastelten Winkelmessgerät befestigt. Dadurch wird es möglich, ebenso einfach wie bei der Berechnung der Baumhöhe etwa die Entfernung von Häusern zu ermitteln. Wichtig ist, dass bei diesen Versuchen der Laserstrahl nicht versehentlich ins Auge gerät, da der Laser die Netzhaut schädigen kann.

Laser 2 wird zuerst auf das zu messende Objekt gerichtet. Danach wird der Laserpunkt von Laser 1 mit dem Laserpunkt von Laser 2 in Deckung gebracht und der sich ergebende Winkel abgelesen. Wenn der Abstand zwischen den beiden Lasergeräten 0,7 Meter beträgt und ein Winkel von 86 Grad ermittelt wurde, dann beträgt die Entfernung zum Objekt 10,03 Meter.

Die Meteorologen auf Flughäfen waren immer schon daran interessiert, die Höhe der Wolken zu ermitteln, in der diese ihren Bahnen zogen, um den Flugkapitänen exakte Auskunft für sichere Start- und Landemanöver geben zu können. Hier führte eine ähnliche Idee wie beim Expe-



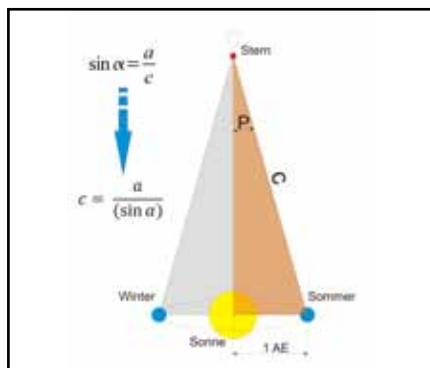
Um eine Berechnung ohne Zwischenschritt durchführen zu können, ist es oft sinnvoll, zwei Formeln zu verschmelzen.

riment mit dem Laserpointer zum Erfolg. Abgesehen davon, dass es den Laser erst viel später gab, behielten sich die Meteorologen mit einer starken Lampe, die sie senkrecht in den Himmel richteten. Die Stelle, an der der Lichtstrahl die Wolke traf, trat deutlich hervor. Nun wurde der Winkel zwischen Lampe und reflektierten Lichtstrahl ermittelt, was nach ein wenig Rechnerei die Wolkenhöhe ergab. Zur Winkelermittlung nutzen die Meteorologen einen sogenannten »Pendelquadranten«. Es kann jedoch auch unser einfacher Winkelmessgerät zum Einsatz kommen.

Mit dem bisher erworbenen Wissen kann nun auch daran gedacht werden, kühne Abstandsberechnung von sehr weit entfernten Sonnensystemen vorzunehmen. Dazu muss man nur den Stern anpeilen und den Winkel Sonne-Stern ermitteln.

Da die Entfernung zur Sonne bekannt ist, lässt sich die Entfernung zu einem Stern einfach bestimmen. Dazu ist es der Rechengenauigkeit zuträglich, wenn der Winkel des Sterns jeweils im Abstand eines halben Jahres, etwa am 21.3 und am 23.9, gemessen wird, da dadurch der Winkel genauer ermittelt werden kann. Heutzutage kann man sich den Zeitaufwand sparen, da sowohl im Internet (beispielsweise in Wikipedia) als auch in zahlreichen astronomischen Büchern die Winkel für viele Objekte veröffentlicht sind.

Der Winkel zur roten Riesen Sonne Aldebaran beträgt beispielsweise 48,94 Millibogensekunden. Um die Entfernung zum Stern zu berechnen, müssen zunächst diese Winkelangaben in Dezimalgrad umgewandelt werden. 48,94 Millibogensekunden sind demnach 0.00001359 Grad. Die Entfernung beträgt also 4.214.646,63 Astronomische Einheiten, was umgerechnet 66,6 Lichtjahre entspricht.



Die Entfernungsbestimmung weit entfernter Objekte ist ebenfalls mit den Winkelfunktionen möglich. Dazu wird der Winkel im Abstand von einem halben Jahr bestimmt. Diese Mühe muss man sich heute nicht mehr machen, da die Parallaxen vieler Objekte in Fachbüchern oder im Internet veröffentlicht sind.



[weltderfertigung.de](http://weltderfertigung.de)